Varianta 008

Subiectul I

a) $\left| i^{2007} \right| = 1$

b) Inversul lui i^{2007} este i.

c) $\sin\frac{\pi}{2007} - \cos\frac{\pi}{2007} < 0$

d) Aria triunghiului ABC este: $S_{ABC} = 15\sqrt{2}$.

e) Ecuația cercului este: $(x-1)^2 + (y+1)^2 - 2^2 = 0$.

f) Distanța de la punctul A la plan este: $\frac{3\sqrt{14}}{7}$.

Subiectul II

1.

a) Coordonatele vârfului parabolei sunt: $x_V = 1$, $y_V = 4$.

b $n = 3$.

c) $x = 6$.

d) $x_1 + x_2 + x_3 = 3$.

e) În mulțimea $\mathbf{Z}_5$, $\hat{4}^{2007} = \hat{4}$.

2.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = +\infty$.

b) $f'(x) = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, pentru $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{1}{3}$.

d) Pentru orice $x > 1$, avem $f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare pe $(1, \infty)$.

e) $\int_1^2 f^3(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

Subiectul III

a) $f(1) = 55{,}5$.

b) $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{10} = \frac{1}{20}$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} - \frac{9}{10}$.

c) Calcul direct.

d) Dacă $z \in \mathbf{C}$ şi $g(z)=0$, atunci $z \neq 0$ şi $10z^{11} = z^{10} + ... + z^2 + 0{,}5z + 0{,}5$ şi împărțind ultima relație cu z^{11} obținem: $10 = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + ... + \frac{1}{z^9} + \frac{0{,}5}{z^{10}} + \frac{0{,}5}{z^{11}}$.

e) În planul complex, considerăm punctele $O(0)$, $A(u)$, $B(v)$ şi $C(u+v)$.
În triunghiul (degenerat sau nu) OAB avem $OC \leq OA + AC$, de unde rezultă concluzia.

f) Presupunem că există $z \in \mathbf{C}$, $|z|>1$, astfel încât $10=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...+\frac{1}{z^9}+\frac{0{,}5}{z^{10}}+\frac{0{,}5}{z^{11}}$

Avem : $10=\left|\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...+\frac{1}{z^9}+\frac{0{,}5}{z^{10}}+\frac{0{,}5}{z^{11}}\right| \leq \left|\frac{1}{z}\right|+\left|\frac{1}{z^2}\right|+...+\left|\frac{1}{z^9}\right|+\left|\frac{0{,}5}{z^{10}}\right|+\left|\frac{0{,}5}{z^{11}}\right|<10$, fals.

g) Dacă z este o rădăcină a lui f, atunci z este şi rădăcină a lui g şi din punctul **d)**, trebuie să avem $10=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...+\frac{1}{z^9}+\frac{0{,}5}{z^{10}}+\frac{0{,}5}{z^{11}}$, relație care, conform punctului **f)** este imposibilă dacă $|z|>1$. Aşadar modulele tuturor rădăcinilor lui f sunt ≤ 1.

Subiectul IV

a) $f'(x)=\cos x-\frac{1}{(x+1)^2}$, $f^{(2)}(x)=-\sin x+\frac{2}{(x+1)^3}$, $f^{(3)}(x)=-\cos x-\frac{6}{(x+1)^4}$, pentru orice $x \geq 0$.

b) Pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x > 0$, deci $f^{(3)}(x)=-\cos x-\frac{6}{(x+1)^4}<0$.

c) Din **b)** rezultă că funcția $f^{(2)}$ este strict descrescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi folosind **a)** deducem că există un unic $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $f^{(2)}(\alpha)=0$.

Obținem că funcția f' este strict crescătoare pe $[0, \alpha]$ şi strict descrescătoare pe $x \in \left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$ şi apoi că există un unic $\beta \in \left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel încât $f'(\beta)=0$.

Deducem că f este strict crescătoare pe $[0, \beta]$ şi strict descrescătoare pe $\left(\beta, \frac{\pi}{2}\right]$ şi apoi că $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \geq 0$.

d) În demonstrație se foloseşte monotonia funcției sinus şi punctul **c)**.

e) Pentru $x > 0$, aplicând teorema lui Lagrange funcției $g:[x, x+1] \to \mathbf{R}$, $g(t) = \ln t$ deducem că există $c \in (x, x+1)$ astfel încât $\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c}$.

Mai mult, $x < c < x+1 \iff \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $\forall\, x > 0$.

f) Înlocuind succesiv în partea din dreapta a inegalității de la **e)** numărul x cu fiecare din elementele mulțimii $\{1, 2, ..., n\}$ și adunând relațiile obținute, se deduce concluzia.

g) Folosind **d)** deducem:

$x_1(a) + x_2(a) + ... + x_n(a) > \frac{a}{a+1}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) \overset{f)}{>} \frac{a}{a+1}\ln(n+1)$ și

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_1(a) + x_2(a) + ... + x_n(a)) = +\infty$.